Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8370083
Centre d'intérêt: 841

Note sur la position de la retenue dans la multiplication de deux nombres naturels / Richard G. Bertrand, Marie Makdissi, Réjeanne Savard, Marcelle Desrochers. -- Sainte-Foy : INRS-Education, 1978.
11, [2] f. ; 28 cm.

Code: R-126. Bibliogr.: f. [13].

Cote Dewey: 372.7/N911 Cote LC: QA/135.5

Descripteur(s): *Mathématiques *Arithmétique *Didactique *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de sujet: *Multiplication *Retenue *Règle des diagonales

Texte qui propose une solution à la difficulté qu'on éprouve en cherchant dans les manuels d'enseignement des mathématiques (aussi bien québécois qu'américains) des explications claires et sans ambiguïté sur la position de la retenue dans la multiplication de deux nombres naturels. En effet, dans certains cas, on semble éviter le problème; dans d'autres cas, on place, au même endroit, des retenues valant respectivement des dizaines et des centaines. Cette carence a incité les auteurs à élaborer un "rationnel" menant à une nouvelle technique de la position de la retenue dans la multiplication de deux nombres naturels.

La solution adoptée, la règle des diagonales, corrige les lacunes de la règle des colonnes, conçue en fonction de l'addition, en étageant les retenues sur plusieurs niveaux ou rangées, correspondant aux dizaines, centaines, milliers, etc. Cette méthode enlève l'ambiguïté suscitée par la règle des colonnes car elle permet à l'enfant de connaître immédiatement la valeur de la retenue, à condition que celui-ci déploie un léger effort de réflexion pour apposer les retenues selon leur valeur respective. Par ailleurs, il s'agit d'un moyen qui bouleverse le moins possible les techniques de retenues couramment utilisées.

Type de document: d
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8370083

NOTE SUR LA POSITION DE LA RETENUE DANS LA MULTIPLICATION DE DEUX NOMBRES NATURELS

Richard G. Bertrand
Marie Makdissi
Réjeanne Savard
Marcelle Desrochers

R-126

INRS-EDUCATION
Avril 1978

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION. 1

I METHODE GENERALEMENT EMPLOYEE: la retenue et la règle des colonnes 2

II SOLUTIONS POSSIBLES. 4

II.1 Premier choix: s'abstenir d'indiquer les retenues impliquant des problèmes de position. 5

II.2 Deuxième choix: généraliser la règle des colonnes. 6

II.3 Troisième choix: rationaliser la méthode couramment employée 7

III METHODE RETENUE: la règle des diagonales. 7

III.1 Les étapes de la règle des diagonales 7

III.2 Illustration globale de la règle des diagonales. 10

III.3 Comparaison entre la règle des diagonales et la méthode couramment employée. 11

INTRODUCTION

Ce texte est le fruit d'une longue réflexion découlant de la difficulté que nous avons éprouvée en cherchant dans les manuels d'enseignement des mathématiques (aussi bien québécois qu'américains) des explications claires et sans ambiguité sur la position de la retenue dans la multiplication de deux nombres naturels. En effet, dans certains cas, on semble éviter le problème; dans d'autres cas, on place, au même endroit, des retenues valant respectivement des dizaines et des centaines. Enfin, certains manuels, pour expliquer la position de la retenue dans la multiplication de deux nombres, ont recours à une simple généralisation de la position de la retenue de l'addition. Ainsi, en aucun cas, les explications données dans différents manuels ne nous ont satisfaits.

Cette carence nous a incités à élaborer un "rationnel" menant à une nouvelle technique de la position de la retenue dans la multiplication de deux nombres naturels. Il importe cependant de noter que nous avons été guidés, dans cette recherche, par le désir d'offrir un moyen qui bouleverserait le moins possible les techniques de retenues couramment utilisées. Cette nouvelle technique pourrait être adoptée facilement par l'enseignant tout en permettant aux étudiants de pouvoir se retrouver aisément en consultant n'importe quel livre de références.

I METHODE GENERALEMENT EMPLOYEE: La retenue et la règle des colonnes.

I.1 Un cas simple: la multiplication par un nombre à 1 chiffre.

Habituellement, pour la multiplication d'un nombre à deux(2) chiffres par un nombre à un(1) chiffre, il ne se pose aucun problème technique pour situer la retenue.

Exemple 1:

	D	U
	④	
	2	7
x		6
1	6	2

Dans la multiplication ci-dessus, la retenue ④ se situe dans la colonne "D" (des dizaines) puisque ce chiffre (retenue) a la valeur de 4 dizaines. On suit alors la règle qui prévaut pour situer les retenues dans l'addition de deux ou plusieurs nombres.

De même, pour la multiplication d'un nombre à trois chiffres, à quatre chiffres ou à "n" chiffres par un nombre à un chiffre on procède de la même façon: on reporte les retenues dans les colonnes indiquant leur valeur respective. On peut dire que dans ce cas, les retenues suivent ce que nous conviendrons d'appeler, par la suite, *la règle des colonnes*; les deux exemples suivants le confirment.

Exemple 2:

	C	D	U
	①	①	
	3	9	6
x			2
	7	9	2

	C	D	U
	①	①	
	3	9	6
+	3	9	6
	7	9	2

Exemple 3:

CM	DM	UM	C	D	U
②	⑤	⑤	③	①	
2	4	8	9	7	3
x					5
1	2	4	4	8	6	5

CM	DM	UM	C	D	U
②	⑤	⑤	③	①	
2	4	8	9	7	3
+ 2	4	8	9	7	3
+ 2	4	8	9	7	3
+ 2	4	8	9	7	3
+ 2	4	8	9	7	3
1	2	4	4	8	6	5

Jusqu'ici nous n'éprouvons aucune difficulté.

1.2 Début des difficultés: multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à deux chiffres.

Dans les multiplications où le multiplicateur (tout comme le multiplicande) a au moins deux(2) chiffres, *la règle des colonnes* a été insuffisante jusqu'ici pour expliquer clairement la valeur de la retenue. Beaucoup d'auteurs, en effet, adoptent la convention suivante.

Exemple 4:

	④	
	②	
	5	8
x	6	3
1	7	4
3	4	8	
3	6	5	4

Nous voyons avec évidence que *la règle des colonnes* est insatisfaisante (pour ne pas dire fausse) puisque les retenues ② et ④, bien que situées dans la même colonne, n'ont pas la même valeur. En effet dans l'exemple 4, la retenue ② provient du produit 3 x 8 = 24; elle vaut 2 dizaines, elle suit donc *la règle des colonnes*. Au contraire, la retenue ④ (issue du produit de 60 x 8 = 480) ayant la valeur de 4 centaines ne suit pas *la règle des colonnes* puisque cette retenue est placée dans la colonne des dizaines. Voici d'autres exemples fréquemment

employés dans les manuels d'enseignement des mathématiques et qui illustrent bien l'ambiguité de l'utilisation de *la règle des colonnes*.

Exemple 5:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle ①} \\ 75 \\ \times\ 30 \\ \hline 2250 \end{array}$$

La retenue ① qui a ici valeur d'une centaine est placée dans la colonne des dizaines.

Exemple 6:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle ③\,④} \\ {\scriptstyle ①\,⑦} \\ 258 \\ \times\ \ 69 \\ \hline 2322 \\ 1548 \\ \hline 17802 \end{array}$$

La retenue ④ qui a valeur de quatre centaines est placée dans la colonne des dizaines et la retenue ③ qui a valeur de trois unités de mille est placée dans la colonne des centaines.

II SOLUTIONS POSSIBLES

L'ambiguité suscitée par la règle des colonnes nous a incités à chercher un moyen, le plus clair possible, pour solutionner ce problème de position des retenues.

Trois choix s'offraient à nous:

1- Ne pas indiquer les retenues impliquant des problèmes de position.

2- Généraliser la règle des colonnes.

3- Rationaliser la méthode couramment employée.

II.1 Premier choix: ne pas indiquer les retenues impliquant des problèmes de position.

Reprenons l'exemple 6:

$$\begin{array}{r} \overset{\textcircled{5}\,\textcircled{7}}{2\,5\,8} \\ \times\quad 6\,9 \\ \hline 2\,3\,2\,2 \\ 1\,5\,4\,8 \\ \hline 1\,7\,8\,0\,2 \end{array}$$

On s'aperçoit que les deux retenues ⑤ et ⑦, provenant du produit du chiffre 9 des unités du multiplicateur par le multiplicande 258, obéissent bien à *la règle des colonnes*. Quant aux retenues ③ et ④, provenant du produit du chiffre 6 des dizaines du multiplicateur par le multiplicande, elles ne sont tout simplement pas indiquées.

En se référant toujours à l'exemple 6, observons ce qui se passe lorsqu'on opère avec le chiffre 6 des dizaines du multiplicateur.

$$\begin{array}{r} \overset{\textcircled{5}\,\textcircled{7}}{2\,5\,8} \\ \times\quad 6\,9 \\ \hline _\;_\;_\;_ \\ 1\,5\,4\,8 \\ \hline - - - - - \end{array}$$

On multiplie $6\boxed{0} \times 8 = 48\boxed{0}$. De ce $48\boxed{0}$, on garde en mémoire le ④ pour pouvoir l'additionner par la suite avec le produit $6\boxed{0} \times 5\boxed{0} = 3\,0\boxed{00}$. De façon évidente, cette méthode comporte plusieurs inconvénients: oubli de la retenue, confusion de la retenue ⑦ avec la retenue ④ gardée "en mémoire"... sans oublier

l'absence de recours immédiat, en cas d'erreur dans le produit. Somme toute, ce procédé semble plus éviter le problème que le résoudre. C'est pourquoi nous n'avons pas souscrit à cette première possibilité.

II.2 Deuxième choix: généraliser la règle des colonnes.

Ce deuxième choix, consiste à oublier la méthode couramment employée (comme dans l'exemple 6) et à appliquer rigoureusement *la règle des colonnes*, c'est-à-dire reporter les retenues dans les colonnes indiquant leur valeur respective.

Exemple 7:

	DM	UM	C	D	U
			① ⑤		
			⑧ ⑦		
			2	5	8
x				6	9
		2	3	2	2
	1	5	4	8	
	1	7	8	0	2

Toutes les retenues ⑧ , ⑦ , ③ et ④ respectent bien la règle des colonnes.

Nous n'avons pas non plus accepté cette deuxième possibilité pour les deux raisons suivantes: premièrement cette méthode, s'éloignant trop de la méthode couramment employée entraîne un remue-ménage excessif au niveau de l'enseignement des techniques de retenue; deuxièmement, elle risque d'entraîner une certaine confusion, les retenues ③ et ④ étant décalées d'une colonne vers la gauche.

II.3 Troisième choix: rationaliser la méthode couramment employée.

Les deux premiers choix ne nous ayant pas apporté de solution satisfaisante, nous avons donc opté pour la rationalisation de la méthode couramment employée. En cherchant à rationaliser cette méthode et pour lui être le plus fidèle possible, nous avons voulu conserver les positions relatives des retenues impliquées sans pour autant nous sentir liés à *la règle des colonnes*.

Voici donc une nouvelle méthode qui, croyons-nous a l'avantage de nous renseigner immédiatement sur la valeur de la retenue et qui, par surcroît, est généralisable: *la règle des diagonales*.

III METHODE RETENUE: la règle des diagonales

Pour présenter *la règle des diagonales* comme solution possible au problème de retenue nous explicitons tout d'abord les différentes étapes de cette nouvelle méthode. Puis, par souci de clarté, nous illustrons de façon synthétique, *la règle des diagonales*; et enfin nous la comparons à la méthode couramment employée.

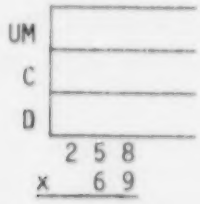
III.1 Les étapes de la règle des diagonales.

L'exemple suivant servira à illustrer les principales étapes de cette méthode:

$$\begin{array}{r} 2\,5\,8 \\ \times\ \ 6\,9 \\ \hline \end{array}$$

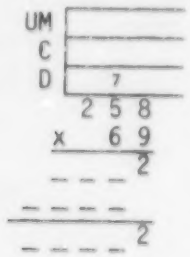
Première étape

Tracer au-dessus du multiplicande des traits horizontaux pour délimiter des rangées* correspondant aux dizaines "D", aux centaines "C" et aux unités de mille"UM".



Deuxième étape

Multiplier le chiffre 9 des unités du multiplicateur par le chiffre 8 des unités du multiplicande et apposer la retenue "7" à la position suivante: 1ère rangée (rangée des dizaines "D"), au-dessus du chiffre 5 des dizaines du multiplicande.



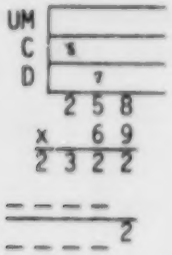
Troisième étape

Multiplier le chiffre 9 des unités du multiplicateur par le

---

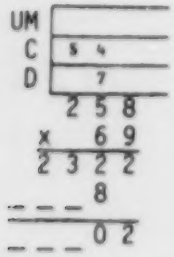
* Le maximum du nombre de rangées est égal à $(m_1-1) + (m_2-1)$ où
m_1 = nombre de chiffres du multiplicande
m_2 = nombre de chiffres du multiplicateur

chiffre 5 des dizaines du multiplicande, additionner la retenue "7" et la biffer; apposer la retenue "5" à la position suivante: 2ème rangée (rangée des centaines "C"), au-dessus du chiffre 2 des centaines du multiplicande. Compléter en multipliant le chiffre 9 des unités du multiplicateur par le chiffre 2 des centaines du multiplicande, additionner la retenue "5" et la biffer.



Quatrième étape

Multiplier le chiffre 6 des dizaines du multiplicateur par le chiffre 8 des unités du multiplicande, et apposer la retenue "4" à la position suivante: 2ème rangée (rangée des centaines car 60 x 8 = 480), au-dessus du chiffre 5 des dizaines du multiplicande.



Cinquième étape

Multiplier le chiffre 6 des dizaines du multiplicateur par le chiffre 5 des dizaines du multiplicande; additionner la retenue "4" et la biffer. Apposer la retenue 3 à la position suivante: 3ème rangée (rangée des unités de mille car 60 x 50 = 3 000), au-dessus du chiffre 2 des centaines du multiplicande. Compléter en multipliant le chiffre 6 des dizaines du multiplicateur par le chiffre 2 des centaines du multiplicande, additionner la retenue "3" et la biffer.

UM	3			
C	5	4		
D		7		
	2	5	8	
x		6	9	
2	3	2	2	
1	5	4	8	
1	7	8	0	2

III.2 Illustration globale de la règle des diagonales.

Les 5 étapes une fois complétées offrent un tableau illustrant les retenues disposées en diagonale.

Exemple 7:

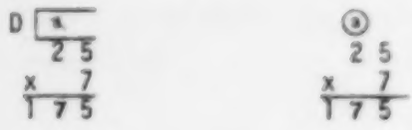
CM	2				
DM	3	7			
UM	4	6	8		
C		3	5		
D			6		
	6	8	7	9	
x		9	6	5	
3	4	3	9	5	
4	1	2	7	4	
6	1	9	1	1	
6	6	3	8	2	3 5

} 5 rangées: (4-1) + (3-1)

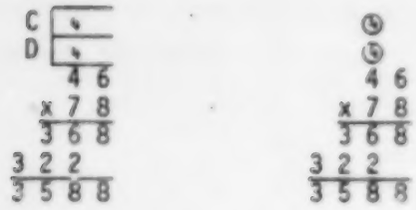
III.3 Comparaison entre la règle des diagonales et la méthode couramment employée.

Si on compare *la règle des diagonales* et la méthode couramment employée, on constate que *la règle des diagonales* est applicable très aisément par les enseignants et les enfants puisque, comme le démontrent les exemples ci-dessous, elle s'éloigne très peu de la méthode couramment employée.

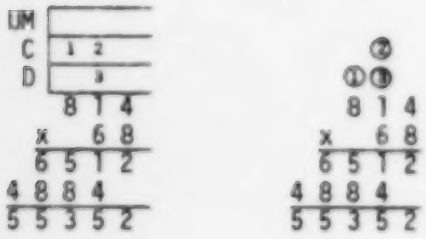
Exemple 8:



Exemple 9:



Exemple 10:



CONCLUSION

Cette méthode, *la règle des diagonales*, enlève l'ambiguité suscitée par *la règle des colonnes* car elle permet à l'enfant de connaître immédiatement la valeur de la retenue, à condition que celui-ci déploie un léger effort de réflexion pour apposer les retenues selon leur valeur respective.

Terminons en signalant que *la règle des diagonales* a été pensée pour venir en aide à des étudiants qui sont confrontés pour la première fois avec des problèmes de retenues dans la multiplication de deux nombres naturels.

BIBLIOGRAPHIE

1) Lyons, Robert, Promath, Cahier d'exercices Multiplication Mc Graw-Hill 1976.

2) Ferland, Yvette et Legris, Roberte, Mathématique 8, Montréal: Les Editions H.R.W. 1973.

3) Ferland, Yvette et Legris, Roberte, Mathématique 8, livre du maître, Montréal: Les Editions H.R.W. 1973.

4) Ferland, Yvette et Legris, Roberte, Mathématique 10, Montréal: Les Editions H.R.W. 1974.

5) Ferland, Yvette et Legris, Roberte, Mathématique 10, livre du maître, Montréal: Les Editions H.R.W. 1974.

6) Duncan, E.R., Capps, L.R., Dolciani, M.P., Quast, W.G., Zweng, M.J., School mathematics Concepts and Skills, Boston: Houghton Mifflin Company 1975.

7) Duncan, E.R., Capps, L.R., Dolciani, M.P., Quast, W.G., Zweng, M.J., School Mathematics Concepts and Skills, Teacher's Annotated Edition 4. Boston: Houghton Mifflin Company 1975.

8) Eicholz, R.E., O'Daffer, P.G., Fleenor, C.R., traduit par Collette , J.P. et Laliberté, L., La Mathématique à l'élémentaire 4,5,6 , Montréal, Editions du Renouveau Pédagogique Inc. 1974 (livres de l'élève) Edition métrique.

9) Eicholz, R.E., O'Daffer, P.G., Fleenor, C.R., traduit par Collette, J.P. et Laliberté, L., La Mathématique à l'élémentaire 4,5,6 , Montréal, Editions du Renouveau Pédagogique Inc. 1974 (livres du maître) Edition métrique.

10) Nichols, Anderson, Dwight, Flournoy, Kalin, Schluep, Simon, Holt School Mathematics volumes 1, 2, 3, 4, 5, Toronto Holt Rinehart and Winston Inc. 1974. (livres de l'élève).

11) Nichols, Anderson, Dwight, Flournoy, Kalin, Schluep, Simon, Holt School Mathematics volumes 1, 2, 3, 4, 5, Toronto Holt Rinehart and Winston Inc. 1974. (livres du maître)